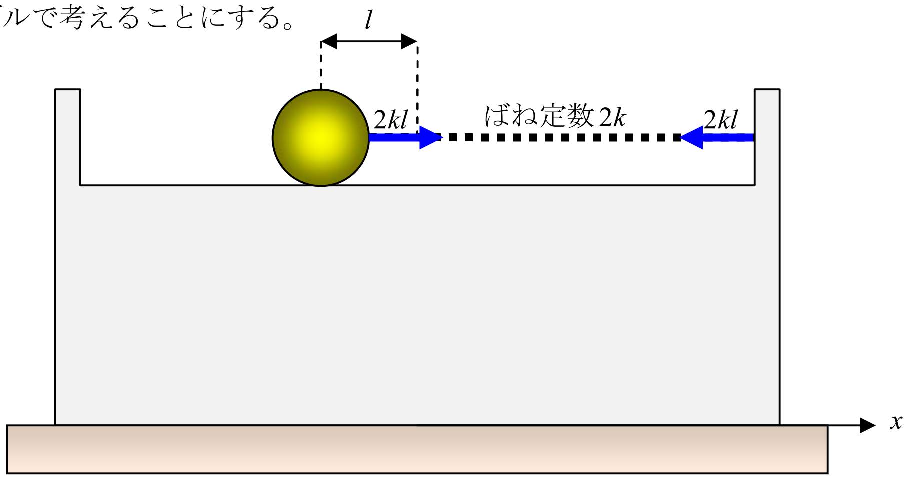
物理問題　I

(1)

$\boxed{ア}$ $\dfrac{2kl}{m}$　$\boxed{イ}$ $-\dfrac{2kl}{M}$　$\boxed{ウ}$ $l\sqrt{\dfrac{2kM}{m(m+M)}}$　$\boxed{エ}$ $l\sqrt{\dfrac{2km}{M(m+M)}}$

解説

合成バネ定数は$2k$ だから，バネ定数$2k$ の 1 本のばねに質量m の小球が取り付けられたモデルで考えることにする。



$\boxed{ア}$・$\boxed{イ}$

小球の加速度をα とすると，運動方程式は$m\alpha = 2kl$　$\therefore \alpha = \dfrac{2kl}{m}$

台車の加速度をβ とすると，運動方程式は$M\beta = -2kl$　$\therefore \beta = -\dfrac{2kl}{M}$

$\boxed{ウ}$・$\boxed{エ}$

小球と台車からなる系に働く外力のx 成分は 0 だから，この系の運動量が保存される。よって, 小球が台車の中央を通過するときの小球の速度をv , 台車の速度をV とすると, 小球を離した瞬間の系の運動量 0 が保存されるから，$mv + MV = 0$

$\therefore m^2v^2 = M^2V^2$　・・・①

また，力学的エネルギーも保存されるから，

$\dfrac{1}{2}\cdot 2k\cdot l^2 = \dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{1}{2}MV^2$　$\therefore mv^2 + MV^2 = 2kl^2$　・・・②

②×M より，$mMv^2 + M^2V^2 = 2kMl^2$

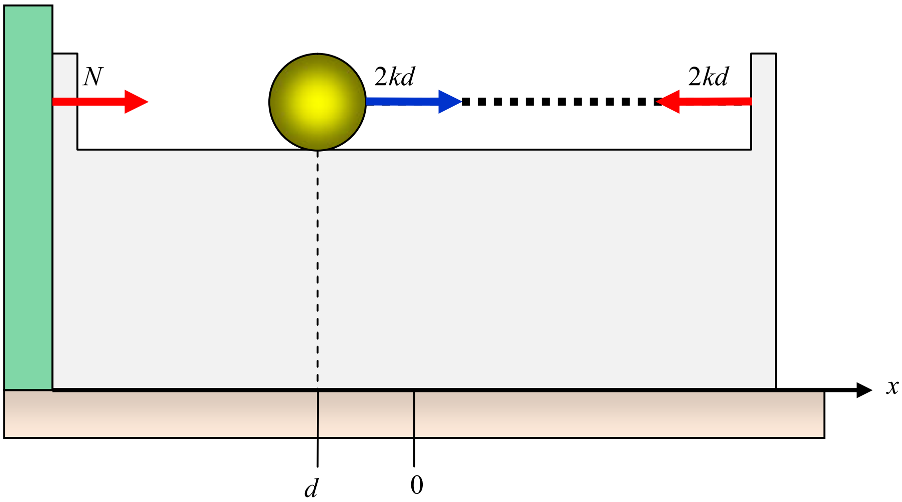
これと①より，$mMv^2 + m^2v^2 = 2kMl^2$　$\therefore |v| = l\sqrt{\dfrac{2kM}{m(m+M)}}$

①および$v = l\sqrt{\dfrac{2kM}{m(m+M)}}$ より，$|V| = l\sqrt{\dfrac{2km}{M(m+M)}}$

(2)

$\boxed{\text{オ}}$ $N+2kd$　$\boxed{\text{カ}}$ $-2kd$　$\boxed{\text{キ}}$ $-v_0\sqrt{\dfrac{m}{2k}}\sin\sqrt{\dfrac{2k}{m}}t$　$\boxed{\text{ク}}$ $\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$

解説



$\boxed{\text{オ}}$

台車がばねから受ける弾性力を F_1 とすると，$Ma_1 = N + F_1$

また，$d<0$ のとき $F_1<0$ より，$F_1 = 2kd$　$\therefore Ma_1 = N + 2kd$

$\boxed{\text{カ}}$

小球がばねから受ける弾性力を F_2 とすると，$ma_2 = F_2$

また，$d<0$ のとき $F_2>0$ より，$F_2 = -2kd$　$\therefore ma_2 = -2kd$

$\boxed{\text{キ}}$

台車が壁に接している間の小球の運動は，運動方程式 $ma_2 = -2kd$ より，

振動中心が $x=0$ の単振動だから，振幅を A，振動周期を T，初期位相を φ とすると，

$$d = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right),\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

ここで，$t=0$ のとき $d=0$，$t=\dfrac{T}{4}$ のとき $d=-A$ だから，$\varphi=\pi$

また，振動端と振動中心についての単振動の力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}\cdot 2k\cdot A^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 \quad \therefore A = v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

よって，$d = v_0\sqrt{\dfrac{m}{2k}}\sin\left(\sqrt{\dfrac{2k}{m}}t+\pi\right) = -v_0\sqrt{\dfrac{m}{2k}}\sin\sqrt{\dfrac{2k}{m}}t$

$\boxed{\text{ク}}$

初めて $N=0$ になるのは小球が再び自然長になった瞬間だから，$\dfrac{T}{2} = \pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$

(3)

問 1

台車上に，ばねの自然長の位置を 0 とし，右方向を正とする y 軸をとる。
y は台車から見た小球の変位を表すと同時に，
小球が受ける弾性力は $-2ky$，台車が受ける弾性力は $2ky$ だから，
小球の水平面に対する加速度を a_m，台車の水平面に対する加速度を a_M とすると，
それぞれの運動方程式も y を用いて，$ma_m = -2ky$，$Ma_M = 2ky$ と表せる。

よって，それぞれの加速度は $a_m = -\dfrac{2k}{m}y$，$a_M = \dfrac{2k}{M}y$

ゆえに，台車から見た小球の加速度は $a_m - a_M = -\dfrac{2k(m+M)}{mM}\cdot y$

これより，台車から見た小球の運動方程式は $m(a_m - a_M) = -\dfrac{2k(m+M)}{M}\cdot y$ となり，

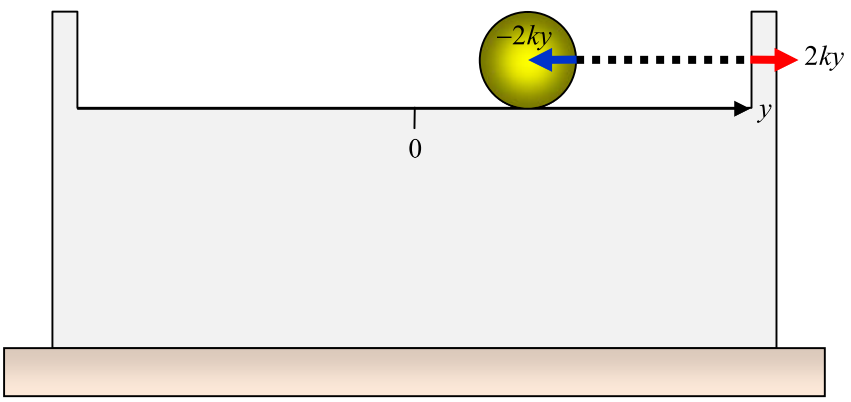
これは台車から見た小球の運動が単振動であることを示している。

したがって，角振動数 ω は，$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{\dfrac{2k(m+M)}{M}}}$，$\omega T = 2\pi$ より，$\omega = \sqrt{\dfrac{2k(m+M)}{mM}}$

あるいは，
台車が壁から離れた瞬間の時刻を $t=0$，振幅を A とすると，$y = A\sin\omega t$ より，

$$a_m - a_M = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 A\sin\omega t = -\omega^2 y \qquad \therefore m(a_m - a_M) = -m\omega^2 y$$

これと $m(a_m - a_M) = -\dfrac{2k(m+M)}{M}\cdot y$ より，$m\omega^2 = \dfrac{2k(m+M)}{M}$ $\quad\therefore \omega = \sqrt{\dfrac{2k(m+M)}{mM}}$



ケ：② $\boxed{コ}$ $\dfrac{mv_0}{m+M}t_1$ $\boxed{サ}$ $\dfrac{mv_0}{m+M}\left(t_1-\dfrac{\sin\omega t_1}{\omega}\right)$ $\boxed{シ}$ $\dfrac{2mv_0}{m+M}$ $\boxed{ス}$ 0

解説

ケ・$\boxed{コ}$

台車が壁から離れた瞬間の小球と台車の水平面に対する速度はそれぞれ v_0, 0 だから，
運動量の和は mv_0 であり，この運動量が保存される。
したがって，台車が壁から離れた後の小球と台車の水平面に対する速度をそれぞれ v_m, v_M とすると，$mv_m+Mv_M=mv_0$

よって，重心の水平面に対する速度を v_{G} とすると，$v_{\mathrm{G}}=\dfrac{mv_m+Mv_M}{m+M}=\dfrac{mv_0}{m+M}$

ゆえに，重心は等速直線運動をし，

台車が壁から離れてからの経過時間を t_1 とすると，重心の x 座標は $\dfrac{mv_0}{m+M}t_1$

$\boxed{サ}$・$\boxed{シ}$・$\boxed{ス}$

台車の中心の x 座標を x_M とすると，
x_M は台車上の $y=0$ と対応するから，小球の x 座標は x_M+y

よって，重心の x 座標を x_{G} とすると，$x_{\mathrm{G}}=\dfrac{m(x_M+y)+Mx_M}{m+M}$

これと $x_{\mathrm{G}}=\dfrac{mv_0}{m+M}t_1$ より，$\dfrac{mv_0}{m+M}t_1=\dfrac{m(x_M+y)+Mx_M}{m+M}$

$\therefore x_M=\dfrac{m}{m+M}(v_0t_1-y)$ ・・・①

続いて y の式を求める。

車上の小球の単振動の振幅を A とすると，
時刻 $t_1=0$ のとき $y=0$ で，その後，正方向に変位するから，$y=A\sin\omega t_1$ ・・・②
問 1 より，台車から見た小球の運動方程式と角振動数 ω はそれぞれ，

$m(a_m-a_M)=-\dfrac{2k(m+M)}{M}\cdot y$，$\omega=\sqrt{\dfrac{2k(m+M)}{mM}}$ $\therefore m(a_m-a_M)=-m\omega^2y$ ・・・③

台車が壁から離れた瞬間の小球と台車の水平面に対する速度はそれぞれ v_0, 0 であり，
このとき小球は振動中心を通るから，台車から見た速度は $v_0-0=v_0$ ・・・④
よって，③，④より，小球の振動端と振動中心における力学的エネルギー保存則の式は

$\dfrac{1}{2}m\omega^2A^2=\dfrac{1}{2}mv_0{}^2$ $\therefore A=\dfrac{v_0}{\omega}$ ・・・⑤

⑤を②に代入することにより，$y=\dfrac{v_0}{\omega}\sin\omega t_1$ ・・・⑥

ゆえに，⑥を①に代入し，整理すると，台車の中心の位置は，

$$x_M = \frac{mv_0}{m+M}\left(t_1 - \frac{\sin \omega t_1}{\omega}\right) \quad \cdot\cdot\cdot \boxed{\text{サ}}$$

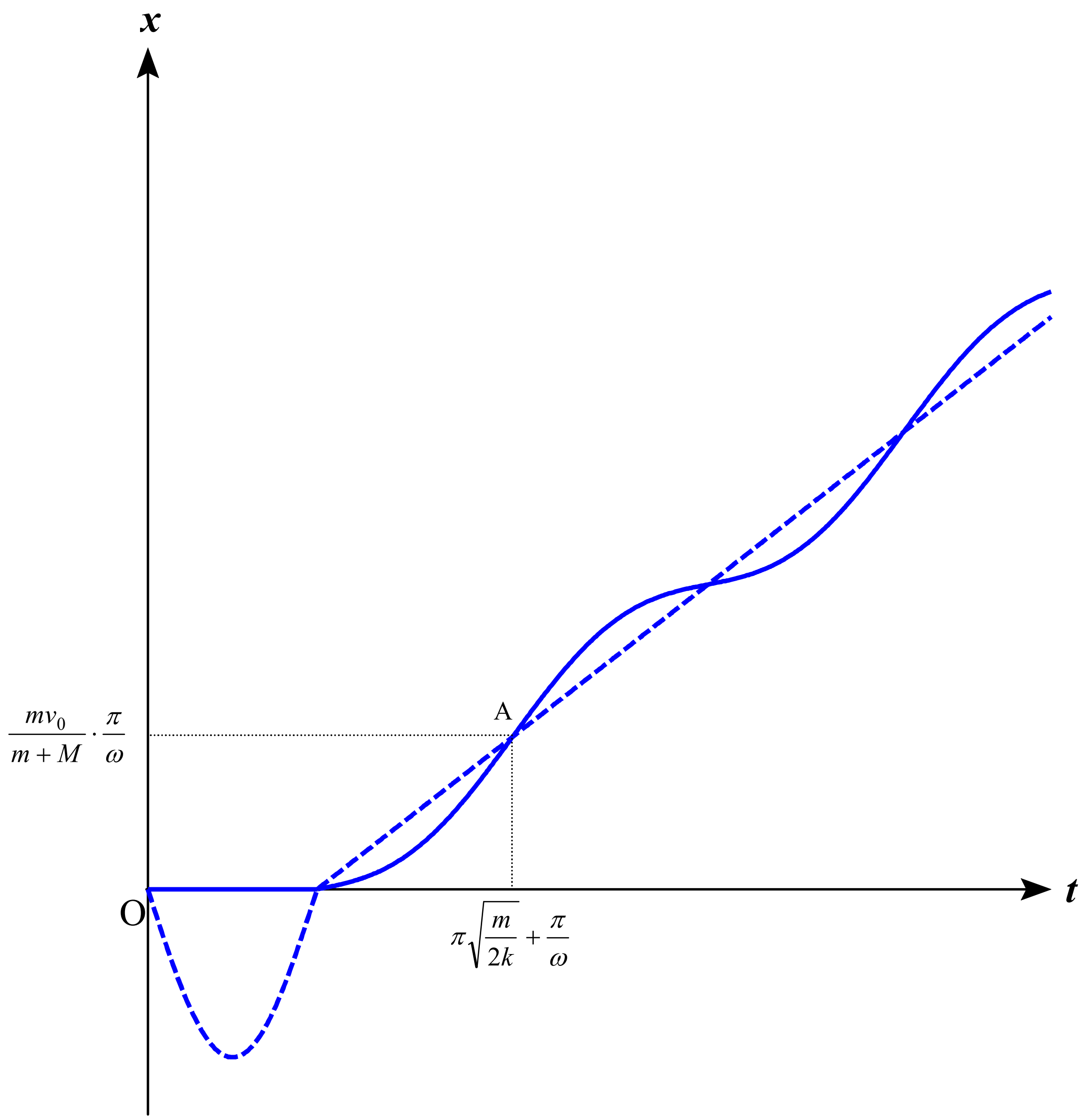
これより台車の速度 v_M は，$v_M = \frac{dx_M}{dt_1} = \frac{mv_0}{m+M}(1-\cos\omega t_1)$

ゆえに，その最大値と最小値はそれぞれ

$$\frac{2mv_0}{m+M} \quad \cdot\cdot\cdot \boxed{\text{シ}}$$

$$0 \quad \cdot\cdot\cdot \boxed{\text{ス}}$$

問 2



物理問題　II

(1)

$\boxed{イ}$ $\dfrac{V_0}{I_0}$　$\boxed{ロ}$ $\dfrac{SV_0}{hI_0}$　$\boxed{ハ}$ $I_0 \sin\omega_0 t$　$\boxed{ニ}$ $\dfrac{\pi}{2}$　$\boxed{ホ}$ $\dfrac{I_0}{\omega_0 V_0}$　$\boxed{ヘ}$ $\dfrac{hI_0}{\varepsilon_0\omega_0 SV_0}$　$\boxed{ト}$ $\sqrt{2}I_0$

解説

$\boxed{イ}$

抵抗の大きさを R とすると，オームの法則より，$R=\dfrac{V_0}{I_0}$

$\boxed{ロ}$

抵抗率を ρ とすると，$R=\rho\dfrac{h}{S}$ より，$\dfrac{V_0}{I_0}=\rho\dfrac{h}{S}$　$\therefore \rho=\dfrac{SV_0}{hI_0}$

$\boxed{ハ}$

求める電流を I_R とすると，オームの法則より，$I=\dfrac{V_0\sin\omega_0 t}{R}=I_0\sin\omega_0 t$

$\boxed{ニ}$

求める電流を I_C，コンデンサーの電気容量を C とすると，

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{dQ}{dt} \\
&= \frac{dCV}{dt} \\
&= C\frac{dV}{dt} \\
&= C\frac{d}{dt}V_0\sin\omega_0 t \\
&= \omega_0 CV_0\cos\omega_0 t \\
&= \omega_0 CV_0\sin\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$\boxed{ホ}$・$\boxed{ヘ}$・$\boxed{ト}$

回路全体を流れる電流を I_T，その振幅すなわち最大値を $I_{\max}$ とすると，図 3 より，

$$
\begin{aligned}
I &= I_{\max}\sin\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}\sin\omega_0 t+\frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}\cos\omega_0 t
\end{aligned}
$$

また，キルヒホッフの第一法則より，$I=I_R+I_C$

よって，$\dfrac{I_{\max}}{\sqrt{2}}\sin\omega_0 t+\dfrac{I_{\max}}{\sqrt{2}}\cos\omega_0 t=I_0\sin\omega_0 t+\omega_0 CV_0\cos\omega_0 t$

これは t についての恒等式だから， $\dfrac{I_{\max}}{\sqrt{2}} = I_0 = \omega_0 C V_0$

よって，

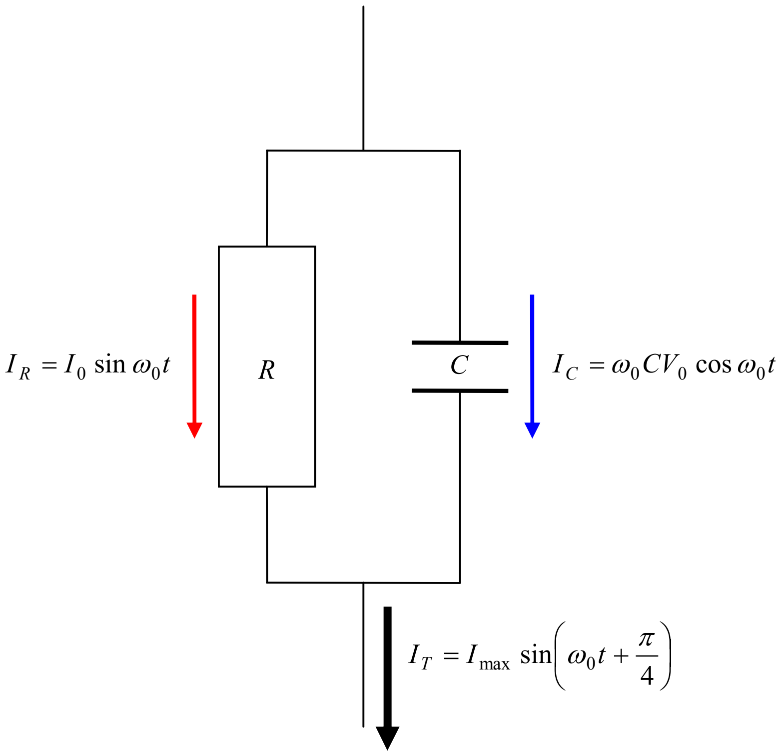
$I_{\max} = \sqrt{2} I_0$ ・・・ $\boxed{\text{ト}}$

$C = \dfrac{I_0}{\omega_0 V_0}$ ・・・ $\boxed{\text{ホ}}$

誘電率を ε_C とすると， $C = \dfrac{\varepsilon_C S}{h}$

これと $\boxed{\text{ホ}}$ より， $\dfrac{\varepsilon_C S}{h} = \dfrac{I_0}{\omega_0 V_0}$

よって，比誘電率 $\dfrac{\varepsilon_C}{\varepsilon_0} = \dfrac{h I_0}{\varepsilon_0 \omega_0 S V_0}$ ・・・ $\boxed{\text{ヘ}}$



問 1

$\boxed{ヘ}$より $\varepsilon_C = \frac{1}{\omega_0}\cdot\frac{hI_0}{SV_0}$，$\boxed{ロ}$の $\rho = \frac{SV_0}{hI_0}$ より $\frac{hI_0}{SV_0} = \frac{1}{\rho}$　$\therefore \varepsilon_C = \frac{1}{\omega_0 \rho}$　すなわち　$\rho = \frac{1}{\varepsilon_C \omega_0}$

ε_C は変化しないから，ω_0 を $2\omega_0$ に変化させるとき，ρ を $\frac{1}{2}$ 倍すればよい。

補足

$I_0 = \omega_0 C V_0$ が成り立つから，ω_0 を $2\omega_0$ に変化させるとき I_0 も $2I_0$ に変化させればよい。

すなわち抵抗率を $\frac{1}{2}$ 倍すればよい。

(2)

$\boxed{チ}$ $\frac{Q}{C}$　$\boxed{リ}$ 0　$\boxed{ヌ}$ $\frac{V_0}{r}$　$\boxed{ル}$ $\frac{V_0}{rI_0 + V_0}\cdot I_0$

解説

$\boxed{チ}$

電圧を V_C とすると，$Q = CV_C$ より，$V_C = \frac{Q}{C}$

$\boxed{リ}$

$Q = 0$ より，$V_C = 0$

$\boxed{ヌ}$

電流を I_1 とする。コンデンサーは導線（電気抵抗 0）と同じ扱いだから，
次ページ図の青色矢印が回路を流れる電流である。

よって，$V_0 = rI_1$ より，$I_1 = \frac{V_0}{r}$

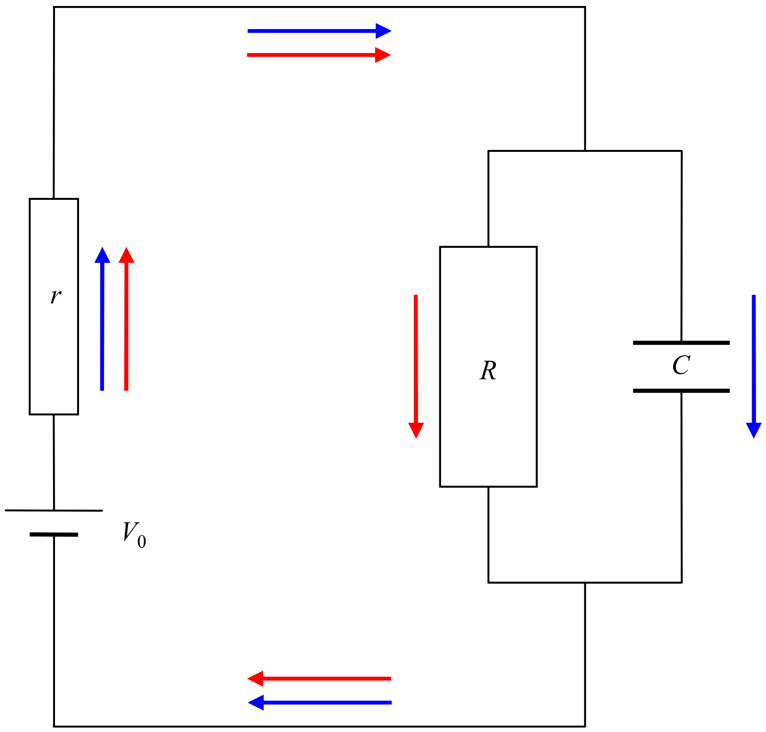
$\boxed{ル}$

電流を I_2 とする。コンデンサーは無限大の抵抗と同じ扱いだから，
次ページ図の赤色矢印が回路を流れる電流である。

よって，$V_0 = (r+R)I_2$ より，$I_2 = \frac{V_0}{r+R}$

これに$\boxed{イ}$の $R = \frac{V_0}{I_0}$ を代入することにより，

$$I_2 = \frac{V_0}{r + \frac{V_0}{I_0}}$$
$$= \frac{V_0}{rI_0 + V_0}\cdot I_0$$



r
R
C
V0

問 2

回路全体を流れる電流を I，コンデンサーの電圧値を V とする。

スイッチを閉じた瞬間の電圧値

キルヒホッフの第二法則より，$V_0 = rI + V$

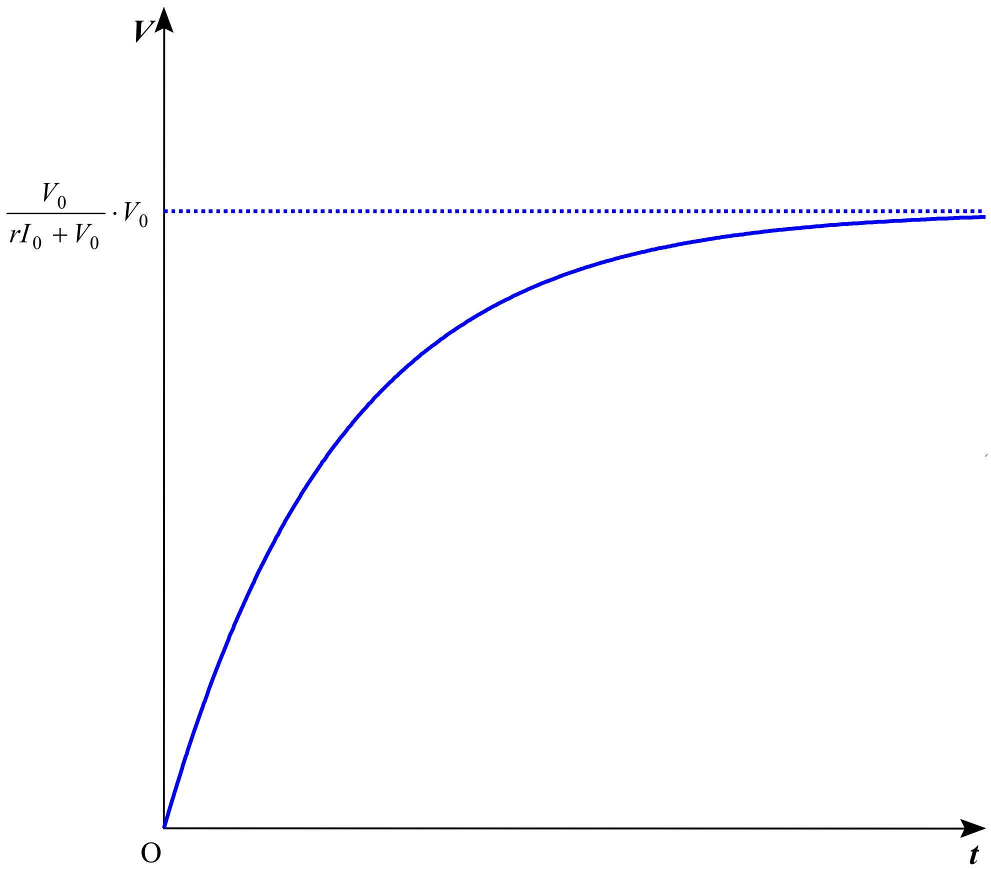
これと $I = \dfrac{V_0}{r}$ より，$V_0 = r \cdot \dfrac{V_0}{r} + V \quad \therefore V = 0$

電圧の値が一定に落ち着いた後の電圧値

$$I = \frac{V_0}{rI_0 + V_0} \cdot I_0 \text{ より，} \quad V = I \cdot \frac{V_0}{I_0} = \frac{V_0}{rI_0 + V_0} \cdot V_0$$

補足

$$V = IR = I \cdot \frac{V_0}{I_0} = \frac{V_0}{rI_0 + V_0} \cdot V_0$$



解説

図 6 の破線と実線に囲まれた部分の面積がコンデンサーに蓄えられた電荷であり，

接線の傾きの大きさは電荷の増加を表す。

このこととコンデンサーの電圧は蓄えられた電荷に比例することから，

図 6 の接線の傾きの大きさは電圧の増加率に対応する。

物理問題　Ⅲ

(1)

$\boxed{あ}$ $2mv_x v_p$　$\boxed{い}$ $\frac{v_x\Delta t}{2L}$　$\boxed{う}$ $\frac{v_p\Delta t}{L}$　$\boxed{え}$ $-\frac{\Delta L}{L}\cdot m{v_x}^2$　$\boxed{お}$ $\frac{3}{2}$　$\boxed{か}$ $\frac{1}{k}$　$\boxed{き}$ $-\frac{2\Delta L}{3kL}$

$\boxed{く}$ $-\frac{2}{3}\cdot\frac{\Delta L}{L}$　$\boxed{け}$ $V^{\frac{5}{3}}$

解説

$\boxed{あ}$

$$
\begin{aligned}
\Delta e &= \frac{1}{2}m(v_x+\Delta v_x)^2-\frac{1}{2}m{v_x}^2 \\
&= \frac{1}{2}m\left\{(v_x+\Delta v_x)^2-{v_x}^2\right\} \\
&= \frac{1}{2}m\{(v_x+\Delta v_x)+v_x\}\{(v_x+\Delta v_x)-v_x\} \\
&= \frac{1}{2}m(2v_x+\Delta v_x)\Delta v_x \\
&= mv_x\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta v_x}{v_x}\right)\Delta v_x \\
&\approx mv_x\Delta v_x \\
&= 2mv_x v_p
\end{aligned}
$$

$\boxed{い}$

衝突回数を n とする。

$2L$ 毎に衝突することと Δt の間に $v_x\Delta t$ 移動することから，　$n\cdot 2L=v_x\Delta t$　　$\therefore n=\frac{v_x\Delta t}{2L}$

$\boxed{う}$

$$
\begin{aligned}
\Delta e_n &= n\Delta e \\
&= \frac{v_x\Delta t}{2L}\cdot 2mv_x v_p \\
&= \frac{v_p\Delta t}{L}\times m{v_x}^2
\end{aligned}
$$

$\boxed{え}$

$v_p\Delta t=-\Delta L$ より，

$$
\begin{aligned}
\Delta e_n &= \frac{v_p\Delta t}{L}\cdot m{v_x}^2 \\
&= -\frac{\Delta L}{L}\cdot m{v_x}^2
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{お}}$

初期状態では，$v_x = v_y = v_z$ だから，$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2\right) = \frac{3}{2} \times mv_x{}^2$

$\boxed{\text{か}}$

単原子分子だから，$\frac{3}{2}mv_x{}^2 = \frac{3}{2}kT$ より，$T = \frac{1}{k} \times mv_x{}^2$

$\boxed{\text{き}}$

$\Delta e_n = \frac{3}{2}k\left(T + \Delta T\right) - \frac{3}{2}kT = \frac{3}{2}k\Delta T$

これと$\boxed{\text{え}}$の $\Delta e_n = -\frac{\Delta L}{L} \cdot mv_x{}^2$ より，$\frac{3}{2}k\Delta T = -\frac{\Delta L}{L} \cdot mv_x{}^2 \quad \therefore \Delta T = -\frac{2\Delta L}{3kL} \times mv_x{}^2$

$\boxed{\text{く}}$

$\boxed{\text{き}}$より，$\Delta T = -\frac{2\Delta L}{3kL} \cdot mv_x{}^2$

$\boxed{\text{か}}$より，$T = \frac{1}{k} \cdot mv_x{}^2$

よって，$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\Delta L}{L}$

$\boxed{\text{け}}$

$pV = nRT$ において，シリンダー内の気体の物質量 n は一定だから，

T と pV は比例関係にある。よって，$TV^{\frac{2}{3}}$ ＝一定より，$pV \cdot V^{\frac{2}{3}}$ ＝一定

すなわち $p \times V^{\frac{5}{3}}$ ＝一定となる。

(2)

$\boxed{こ}$ $\frac{3}{2}R(T_C - T_B)$ $\boxed{さ}$ $\frac{3}{2}R(T_D - T_A)$ $\boxed{し}$ $1-\frac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$ $\boxed{す}$ $1-\varepsilon^{-\frac{2}{3}}$

解説

$\boxed{こ}$

B から C へ定積変化する過程において気体は外部から熱を吸収する。

これと気体の物質量が 1 モルであることから，その熱量は $\frac{3}{2}R(T_C - T_B)$

$\boxed{さ}$

D から A へ定積変化する過程において気体は外部に熱を放出する。

これと気体の物質量が 1 モルであることから，その熱量は $\frac{3}{2}R(T_D - T_A)$

補足

$PV = RT$ より，T は PV に比例する。よって，図より $T_A < T_D < T_B < T_C$

$\boxed{し}$

C から D へ断熱変化する過程において気体は外部に仕事をする。

また，断熱変化だから，その仕事の大きさは系の内部エネルギーの減少量と等しい。

よって，この仕事を W_{CD} とすると，$W_{CD} = \frac{3}{2}R(T_C - T_D)$ ・・・①

A から B へ断熱変化する過程において気体は外部から仕事をされる。

また，断熱変化だから，その仕事の大きさは系の内部エネルギーの増加量と等しい。

よって，この仕事を W_{AB} とすると，$W_{AB} = \frac{3}{2}R(T_B - T_A)$ ・・・②

したがって，気体が外部にした正味の仕事は，①－②より，$\frac{3}{2}R(T_C - T_D - T_B + T_A)$

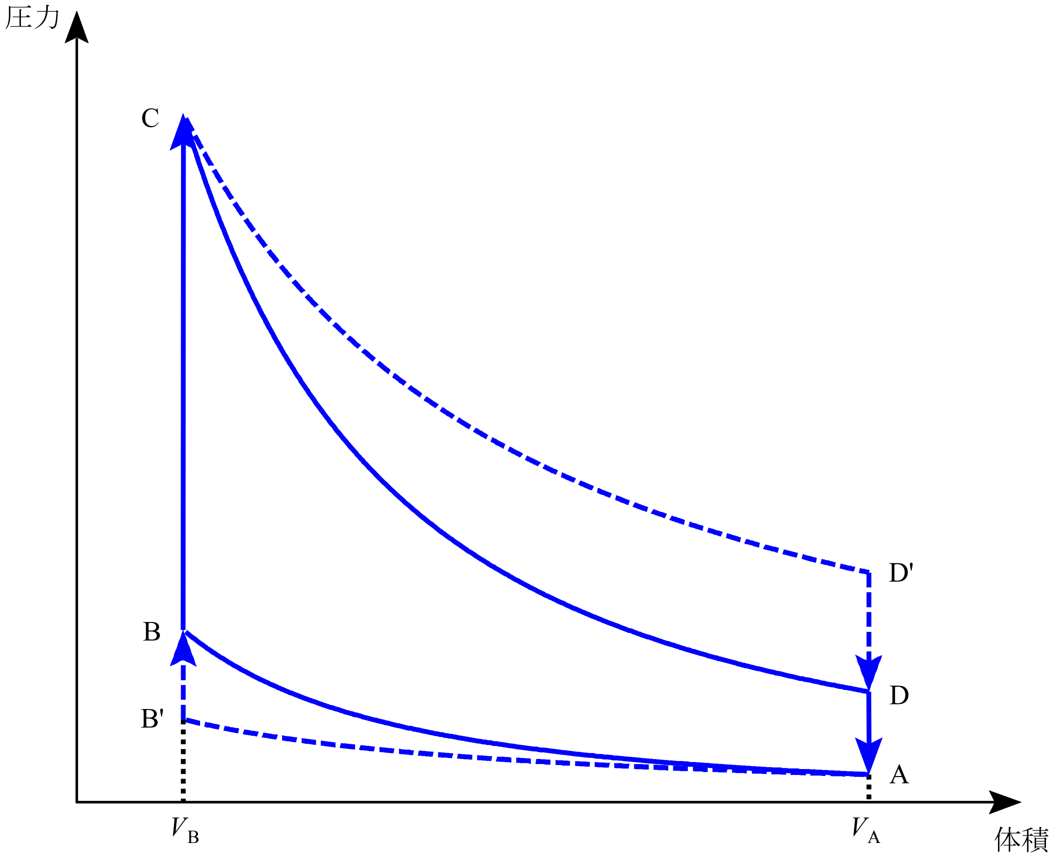
ゆえに，このサイクルの熱効率は $\dfrac{\frac{3}{2}R(T_C - T_D - T_B + T_A)}{\frac{3}{2}R(T_C - T_B)} = 1-\dfrac{T_D - T_A}{T_C - T_B}$

$\boxed{す}$

$T_D V_A^{\frac{2}{3}} = T_C V_B^{\frac{2}{3}}$，$T_A V_A^{\frac{2}{3}} = T_B V_B^{\frac{2}{3}}$ より，$(T_D - T_A)V_A^{\frac{2}{3}} = (T_C - T_B)V_B^{\frac{2}{3}}$

$$\therefore \frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{-\frac{2}{3}} \qquad \therefore 1-\frac{T_D - T_A}{T_C - T_B} = 1-\varepsilon^{-\frac{2}{3}}$$

問 1



サイクル①では ABCD で囲まれた面積，サイクル②では AB'CD' で囲まれた面積が気体がする仕事であり， AB'CD' で囲まれた面積のほうが大きいからサイクル②で気体が外部にする仕事の方が大きい

解説

断熱変化の式は $PV^{\frac{5}{3}}=a$ （a は定数）より， $P=\dfrac{a}{V^{\frac{5}{3}}}$

等温変化の式は $PV=b$ （b は定数）より， $P=\dfrac{b}{V}$

よって，断熱変化の方が P の変化の大きさが大きい。

問 2